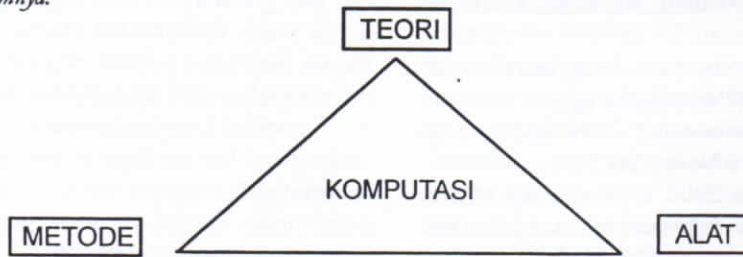


MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN KOMPUTER

F Soesianto

ABSTRAK

Naskah tutorial ini ditulis untuk memberi gambaran mendasar tentang bidang kegiatan yang disebut teknik komputasi, hubungannya dengan matematika, dan tempatnya dalam teknik informatika dan teknik komputer pada umumnya.



1. Matematika : Apakah itu?

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia, matematika adalah "ilmu tentang bilangan-bilangan, hubungan antara bilangan, dan prosedur operasional yang digunakan dalam penyelesaian masalah mengenai bilangan". Kalimat ini bukan rumusan yang tepat, sekalipun dapat dikatakan memadai untuk dicantumkan dalam kamus. Ada cabang matematika yang tidak langsung berurusan dengan bilangan, misalnya geometri, topologi, teori graf serta logika.

Dalam naskah ini matematika didefinisikan sebagai ilmu tentang pernyataan-pernyataan, serta syarat-syarat yang diperlukan agar sebuah pernyataan adalah benar. Dalam matematika diuji kebenaran sebuah pernyataan, diteliti makna atau implikasi dari setiap kata yang terdapat didalamnya, serta dicoba dikembangkan pernyataan-pernyataan lain yang berkaitan. Pernyataan itu dapat mengenai apa saja, yang oleh para matematikawan dipilih sebagai obyek-obyek yang pantas diteliti dan dicermati. Salah satu

obyek yang menarik adalah, tentu saja, bilangan. Ternyata ada aneka ragam bilangan, baik yang asli, maupun yang tidak asli. Ternyata ada bilangan yang memiliki ciri istimewa, yang lalu disebut bilangan prima. Studi mengenai hal ini sangat penting tidak hanya dalam matematika, namun juga dalam teknik komputer.

Obyek menarik lain terdapat dalam geometri, misalnya titik, garis, bidang, serta bentuk yang dapat muncul daripadanya, seperti segitiga, lingkaran, elips, kubus, bola, kerucut, piramida, dan lain-lain. Sangatlah terkenal pernyataan Pythagoras, bahwa dalam segitiga siku-siku, luas bujur sangkar pada hipotenusa (sisi miring) sama dengan jumlah luas bujur sangkar kedua sisi lainnya.

Obyek menarik lain bagi para matematikawan adalah himpunan, serta hubungan antara berbagai himpunan. Studi mengenai hal ini telah menghasilkan aneka manfaat praktis, serta mengarahkan matematikawan kepada aneka persoalan sangat mendasar, bahkan sering bersifat abstrak, mengenai matematika serta

pondasi yang di atasnya terdapat bangunan yang sekarang disebut matematika. Apapun yang dipelajari dan dilakukan, semua kembali kepada usaha untuk membuat sekurang-kurangnya sebuah pernyataan yang dapat dipertanggung-jawabkan.

Pernyataan akan diterima sebagai pernyataan yang benar, jika kepadanya dapat diberikan (sekurang-kurangnya) sebuah *bukti* yang meyakinkan, yaitu argumentasi atau deretan kalimat yang rapi, runtut dan masuk akal, yang daripadanya tidak ada keragu-raguan lagi mengenai kebenaran dari teorema yang dibahas. Pernyataan yang kebenarannya tidak pernah diragukan, namun tidak pernah diberikan buktinya, disebut *aksioma*. Pernyataan yang kebenarannya telah dijamin sekurang-kurangnya oleh sebuah *bukti* meyakinkan disebut *teorema* atau *lemma*.

Matematika dan logika. Matematika biasanya diletakkan dalam kategori yang sama dengan *logika*, yang merupakan cabang dari filsafat. *Filsafat* itu sendiri dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia diterangkan sebagai "pengetahuan dan penyelidikan dengan akal budi mengenai hakekat segala yang ada, sebab, asal dan hukumnya" — *scientia rerum per causas ultimas*. Menurut Bertrand Russel, logika adalah masa kakak-kanak dari matematika.

Matematika dan fisika. Matematika juga biasanya diletakkan dalam kategori yang sama dengan *fisika*, yang masa kanak-kanaknya disebut kosmologi, yang merupakan cabang dari filsafat juga. Dalam fisika dipelajari obyek alam (benda), dan atas obyek itu dicoba dibuat pernyataan-pernyataan yang benar, yang sekarang biasa disebut hukum-hukum alam atau hukum-hukum fisika. (Dalam naskah ini *kimia* diperlakukan sebagai bagian yang tak terpisahkan dari fisika).

Adakah beda nyata antara teorema (dalam matematika) dan hukum (dalam fisika)? Salah satu perbedaan adalah dalam pembuktian atas kebenarannya. Teorema dibuktikan melalui *argumentasi*, sedang hukum dalam fisika dibuktikan melalui *eksperimen* atau pengamatan.

2. Matematika : sarana pemodelan bagi para teknisi

Dalam naskah ini yang dimaksudkan dengan para teknisi adalah mereka yang hidup dengan melakukan kegiatan ada dalam bidang ilmu-ilmu teknik, yaitu mereka perhatiannya adalah kepada upaya penyelesaian atas persoalan-persoalan nyata dalam masyarakat.

Dihadapkan kepada persoalan nyata dalam masyarakat, apakah yang dapat dikerjakan oleh para teknisi? Kiranya dapat dibayangkan bahwa para teknisi itu akan merumuskan *model* bagi persoalan yang akan dipecahkan. Yang disebut model itu sesungguhnya juga berupa pernyataan tentang persoalan yang dihadapi. Hal itu dikerjakan, antara lain dengan mencermati lingkup persoalannya, membuat kategori berdasarkan bidang kajian dan ilmu, melakukan pemilahan atas variabel serta parameter mana yang primer dan mana yang sifatnya sekunder, serta menetapkan suatu model, yang dinilai memiliki cukup sederhana untuk analisis selanjutnya, tetapi sekaligus cukup realistis untuk menggambarkan keadaan dalam dunia nyata. Dengan lain perkataan, membuat model sering bukan pekerjaan mudah. Namun pada umumnya "great engineering is simple engineering".

Mengingat hukum-hukum alam umumnya diungkapkan dalam pernyataan yang bersifat pasti serta tak mengandung keragu-raguan akan sebab dan akibatnya, maka model yang diperoleh daripadanya juga bersifat Ada

deterministik. Model ini sering berupa persamaan matematika yang dijabarkan dari azas-azas kekekalan energi, massa dan momentum. Model ini bersifat *deterministik*. Sebaliknya, ketidak-lengkapan informasi mengenai aspek-aspek tertentu dari realitas, atau tidak tersedianya rumusan yang memadai untuk menyatakan hukum alam yang berlaku bagi realitas tersebut sering mendorong pembentukan model yang bersifat *non-deterministik*.

Model deterministik seperti dijelaskan di muka umumnya memiliki prosedur komputasi yang jelas. Sebaliknya model non-deterministik pengembangannya sering memerlukan *pembelajaran* dengan satu atau lain cara. Prosedur komputasinya mengandalkan konsep jaringan neural artifisial. Disini neural artifisial adalah bentuk duplikat sederhana dari *neuron* yang terdapat dalam otak manusia.

3. Komputasi : alat, metode dan teori

Komputasi adalah kegiatan mendapatkan penyelesaian atau *solusi* atas persoalan yang dinyatakan dalam model matematis. Secara matematis pada umumnya model mengambil bentuk

$$f(x) = y,$$

dengan $x =$ *himpunan informasi* yang tersembunyi dalam model, berupa besaran-besaran yang nilainya harus ditetapkan agar persoalan nyata dapat dipecahkan, $y =$ *himpunan data* yang tersedia, berupa besaran-besaran yang nilainya telah diketahui, dan $f(\cdot) =$ operator matematis model tersebut. Secara singkat dalam komputasi diberikan $f(\cdot)$ serta nilai numeris y , lakukanlah aktivitas untuk memperoleh nilai numeris x , agar $f(x) = y$ dipenuhi.

Secara matematis, x diperoleh melalui operasi invers atas y . Konkritnya,

$$x = f^{-1}(y),$$

dengan f^{-1} operator matematis untuk melaksanakan operasi invers yang dimaksudkan. Masalah utama: dalam praktek tidak banyak operator f dengan f^{-1} diketahui atau langsung dapat ditetapkan dengan mudah. Oleh karena itu proses komputasi sering harus melalui jalan yang tak langsung.

Teknik komputasi adalah perangkat ilmu tentang *alat* (biasanya sebuah komputer), *metode* (yang disebut algoritma) dan *teori* (bukti matematis bahwa komputasi memberi hasil yang benar) yang diperlukan untuk melaksanakan komputasi tersebut.

Pertama tentang alat. Alat komputasi paling kuno adalah kertas, potlot dan karet penghapus. Alat komputasi yang lebih maju adalah kertas, potlot, karet penghapus dan mistar hitung. Selanjutnya mistar hitung diganti dengan kalkulator (elektronis), yang dapat dibawa di dalam saku. Alat komputasi yang modern adalah *komputer*.

Selanjutnya tentang metode dan teori dibalik metode itu. Sekarang ditinjau kasus mencari nilai akar kuadrat dari bilangan 10. Konkritnya, berapakah $x = \sqrt{10}$? Periksalah proses komputasi dalam halaman berikut ini.

	3.1622	3.	1	6	2	2
		10				
$3 \times 3 =$		9				
		1	00			
$61 \times 1 =$			61			
			39	00		
$626 \times 6 =$			37	56		
			1	44	00	
$6322 \times 2 =$			1	26	44	
				17	56	00
$63242 \times 2 =$				12	64	84
				4	91	16

Ada kelemahan serius pada metode ini: ia tidak cocok untuk dijalankan pada komputer. Komputer menggunakan metode lain untuk mendapatkan hasilnya, yaitu dengan bantuan rumus

$$x_{k+1} = (x_k + a/x_k)/2,$$

yang digunakan berulang-ulang sampai diperoleh hasil yang diharapkan. Dalam rumus ini a adalah bilangan yang harus dicari nilai akarnya, x_k dan x_{k+1} adalah taksiran ke- k dan ke- $(k+1)$ atas nilai akar yang sebenarnya. Oleh karena itu rumus memerlukan taksiran awal x_0 . Misalkan diambil $x_0 = 10$. Rumus tersebut berturut-turut memberikan hasil dibawah ini:

$$x_1 = (10 + 10/10)/2 = 5.50$$

$$x_2 = (5.50 + 10/5.50)/2 = 3.6591$$

$$x_3 = (3.6591 + 10/3.6591)/2 = 3.1625$$

$$x_4 = (3.1625 + 10/3.1625)/2 = 3.1623$$

$$x_5 = (3.1623 + 10/3.1623)/2 = 3.1623.$$

Tampaklah disini bahwa pada penerapan rumus yang kelima telah diperoleh taksiran yang (dalam hal ini) sama dengan taksiran sebelumnya. Dengan lain perkataan telah diperoleh hasil nilai akar yang diinginkan, yaitu $x = 3.1623$. Metode ini sangat cocok untuk diimplementasikan dalam komputer karena hanya memerlukan dua operasi aritmatika saja.

Apakah yang sekarang dapat dikatakan mengenai alat - metode - teori ini? Pastilah bahwa metode harus didukung oleh teori dan harus dapat diimplementasikan pada peralatan yang digunakan. Pastilah bahwa ada metode yang *baik*, ada metode yang *buruk*, dan barangkali ada juga metode yang *sangat buruk*. Metode disebut baik jika dapat diimplementasikan tanpa kesulitan serta memberikan hasil yang diinginkan dengan cepat dan tepat. Metode disebut baik biasanya adalah karena ia mampu memecahkan soal-soal yang umumnya dikategorikan sulit, sebab

metode yang buruk biasanya hanya mampu menyelesaikan soal-soal yang mudah saja. Selanjutnya metode disebut *cepat* jika operasi komputasi pendek, antara lain karena tidak melibatkan jenis-jenis operasi yang "mahal" dari segi penggunaan sumberdaya komputer. Disebut *tepat* jika hasil komputasi tidak jauh berbeda dari hasil yang sebenarnya diinginkan.

Selanjutnya, apa yang sekarang terjadi? Persoalan matematika yang bersifat *implisit* $f(x) = y$ telah dirumuskan sebagai persoalan menetapkan fungsi invers $x = f^{-1}(y)$, yang bersifat *eksplisit*. Dalam contoh mencari akar ini $f(x) = x^2 - a = 0$. Proses komputasi untuk mendapatkan fungsi (invers) yang eksplisit $f^{-1}(\cdot)$ itu dilaksanakan melalui *penerapan berulang* sebuah *fungsi eksplisit lain* $x_{k+1} = g(x_k)$, yang ditetapkan dengan bantuan matematika (tak dibahas di sini). Dengan lain perkataan, soal yang rumusannya *implisit*, karena pengubahannya ke dalam rumusan *eksplisit* pada umumnya tidak mudah, maka pemecahannya diperoleh dengan bantuan sebuah *fungsi eksplisit lain* yang diterapkan berulang-ulang. *Algoritma* hanyalah deretan pernyataan untuk melaksanakan proses bertahap dan berulang tersebut; sedangkan *program* hanyalah pengungkapan dalam komputer tertentu.

Algoritma untuk menetapkan nilai akar x dari sebuah bilangan real positif a adalah sebagai berikut:

Inputkan a;

Nyatakan $x := a$;

Jika belum konvergen, kerjakan terus yang terdapat dibawah ini:

$y := (x + a/x)/2$; $x := y$;

Tampilkan x;

Selesai.

Namun dapat ditanyakan apakah yang dimaksud dengan "belum konvergen"? Salah

satu kriteria konvergensi adalah $|x - y| \leq 0.000001$. Algoritma yang lebih lengkap adalah dibawah ini:

Inputkan a ;

Nyatakan $x := 0$; $y := a$;

Jika $|x - y| \leq 0.000001$, , kerjakanlah :

$x := y$; $y := (x + a/x)/2$;

Tampilkan x ;

Selesai.

DAFTAR PUSTAKA

1. Treffethen, Lloyd N. dan Bau, David, III, 1997. *Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
2. Soesianto, F. 2003, *Teknik Komputasi Dasar*, Yogyakarta: Grha Ilmu. (akan terbit).